Mehrstufige Zufallsversuche

- Erweiterte Übungen -

Aufgabe 1

Eine Urne enthält 2 rote, 3 schwarze und 5 gelbe Kugeln.
Nacheinander werden zwei Kugeln mit Zurücklegen genommen.
Zeichne das Baumdiagramm, bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung und die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

a) A: Beide Kugeln sind gleichfarbig.

b) B: Die erste Kugel ist rot und die zweite ist schwarz.

c) C: Die zweite Kugel ist rot oder schwarz.

d) D: Wie lautet das Gegenereignis von C und mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt es auf?

Aufgabe 2

Ein Test besteht aus vier Fragen. Zu jeder der vier Fragen gibt es jeweils drei Antworten, von denen jeweils nur eine Antwort richtig ist.

Jemand geht völlig unvorbereitet in den Test und kreuzt auf Glück an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er den Test besteht, wenn mindestens drei Fragen richtig angekreuzt sein müssen.

Aufgabe 3

Fünf Freunde unternehmen eine Kaffeefahrt nach Helgoland und müssen nach der Rückfahrt durch die Zollkontrolle. Obwohl alle angeben, nur die erlaubte Menge Zigaretten und Alkohol eingekauft zu haben, haben Sven und Tim zu viel Zigaretten mitgenommen. Der Zollbeamte wählt zwei von den fünfen aus, um sie zu durchsuchen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte keinen Schmuggler?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte mindestens einen der beiden Schmuggler?

Aufgabe 4

Die Jahrgangsstufe 9 einer Gesamtschule besteht aus zwei gleichgroßen Klassen mit insgesamt 40 Schülern. Jeder Schüler erhält für eine Theatervorstellung eine Freikarte. Im Theater werden den Schülern nach dem Zufallsprinzip die Plätze 1 bis 40 zugeordnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sitzen auf den ersten 6 Plätzen nur Schüler einer Klasse? (Hinweis: Verwende ein geeignetes Urnenmodell)

Aufgabe 5

Im Lager einer Töpferei befinden sich 100 frisch gefertigte Tontöpfe. Man weiß, das 20% davon fehlerhaft sind. Vier Tontöpfe werden zufällig entnommen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das die vier entnommenen Töpfe fehlerfrei sind?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das von den vier entnommenen Töpfen drei fehlerfrei sind?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das von den vier entnommenen Töpfen mindestens drei fehlerfrei sind?

Aufgabe 6

Bei einer Produktionskontrolle wird ein bestimmter Fehler in 10% der Fälle übersehen. Deshalb wird das Produkt von drei verschiedenen Personen kontrolliert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein unbrauchbares Produkt

a) Spätestens bei der 2. Kontrolle als unbrauchbar erkannt wird.

b) Erst bei der 3. Kontrolle als unbrauchbar erkannt wird.

c) Nicht als unbrauchbar erkannt wird.

Aufgabe 7

In einer Fabrik wird Porzellangeschirr hergestellt. Jedes Teil wird nacheinander in verschiedenen Kontrollgängen auf Form, Farbe und Oberflächenbeschaffenheit geprüft. Erfahrungsgemäß muss bei 25% die Form beanstandet werden. Die Farbkontrolle passieren 85% der Teile ohne Beanstandung. In 20% aller Fälle genügt die Oberfläche nicht den Ansprüchen der 1. Wahl. Nur wenn alle drei Kontrollen ohne Beanstandung durchlaufen sind, kann ein Teil als 1. Wahl verkauft werden. Ein Teil ist 2. Wahl, wenn die Qualität an nur einer Kontrollstelle nicht ausreicht. Alle übrigen Porzellanteile gelten als Ausschussware.

a) Stellen Sie die dreifache Kontrolle in einem Baumdiagramm dar.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 1. Wahl ist?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 2. Wahl ist?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil Ausschuss ist?

Aufgabe 8

In der Lotterie A gibt es von 10000 Losen 4500 Gewinne. in der Lotterie B sind unter 15000 Losen 9500 Gewinne. Jemand kauft von jeder Lotterie ein Los.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in beiden Lotterien gleichzeitig zu gewinnen?

   E_1: Gewinn in beiden Lotterien.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nichts zu gewinnen?

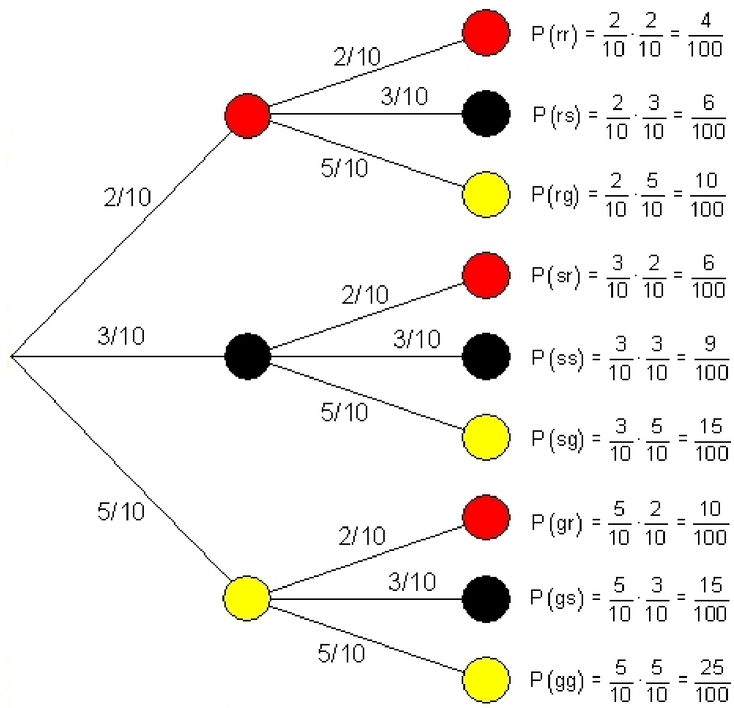
   E_2: Gewinn in keiner Lotterie?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in mindestens einer Lotterie zu gewinnen?

   E_3: Gewinn in mindestens einer Lotterie.

Lösungen

Aufgabe 1



Die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

e_i	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs	gg
P	$\frac{4}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{25}{100}$

a) A: Beide Kugeln sind gleichfarbig.

$$P(A)=P((r,r))+P((s,s))+P((g,g))=\frac{4}{100}+\frac{9}{100}+\frac{25}{100}=\frac{38}{100}=0{,}38=38\,\%$$

b) B: Die erste Kugel ist rot, und die zweite ist schwarz.

$$P(B)=P((r,s))=\frac{6}{100}=0{,}06=6\%$$

c) C: Die zweite Kugel ist rot oder schwarz.

$$\begin{aligned}P(C)&=P((r,r))+P((r,s))+P((s,r))+P((s,s))+P((g,r))+P((g,s))\\&=\frac{4}{100}+\frac{6}{100}+\frac{6}{100}+\frac{9}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}\\&=\frac{50}{100}=0{,}5=50\,\%\end{aligned}$$

d) D: Die zweite Kugel ist schwarz.

$$P(D)=1-P(C)=1-0{,}5=0{,}5=50\,\%$$

Aufgabe 2

Es handelt sich um einen vierstufigen Zufallsversuch (vier Fragen).

Die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort ist $\frac{1}{3}$, die für eine falsche $\frac{2}{3}$.

P(mind. 3 Fragen richtig)=P(r, r, r, r)+P(r, r, r, f)+P(r, r, f, r)+P(r, f, r, r)+P(f, r, r, r)

$$P(r, r, r, r)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$P(r, r, r, r)=P(r, r, r, f)+P(r, r, f, r)+P(r, f, r, r)+P(f, r, r, r)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}$$

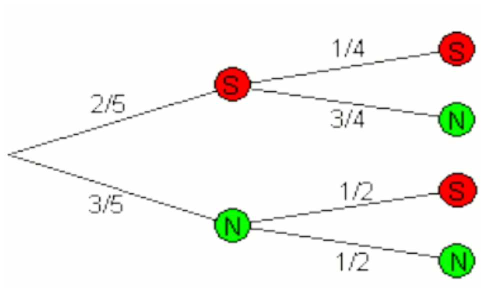
$$P(\text{mind. 3 Fragen richtig})=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{8}{3^4}+\frac{1}{3^4}=\frac{9}{3^4}=\frac{1}{9}\approx 0{,}11$$

Aufgabe 3

Modell:

In einer Urne befinden sich 3 grüne Kugeln (keine Schmuggler N) und 2 rote Kugeln (Schmuggler S).

Es wird zweimal eine Kugel gezogen ohne zurücklegen.



$$P(S,S)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}=0{,}1=10\%$$

$$P(S,N)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}=0{,}3=30\%$$

$$P(N,S)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=0{,}3=30\%$$

$$P(N,N)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=0{,}3=30\%$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte keinen Schmuggler?

   P (NN) = 0,3 =30%

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte mindestens einen der beiden Schmuggler?

   P(mind. einen S) = P(SS) + P(SN) + P(NS) = 0,1 + 0,3 + 0,3 = 0,7 = 70%

Aufgabe 4

Urnenmodell:

20 rote Kugeln (Klasse 1) und 20 grüne Kugeln (Klasse 2).

Sechsmal ziehen ohne zurücklegen.

$P=P(\{r,r,r,r,r,r\})+P(\{g,g,g,g,g,g\})$

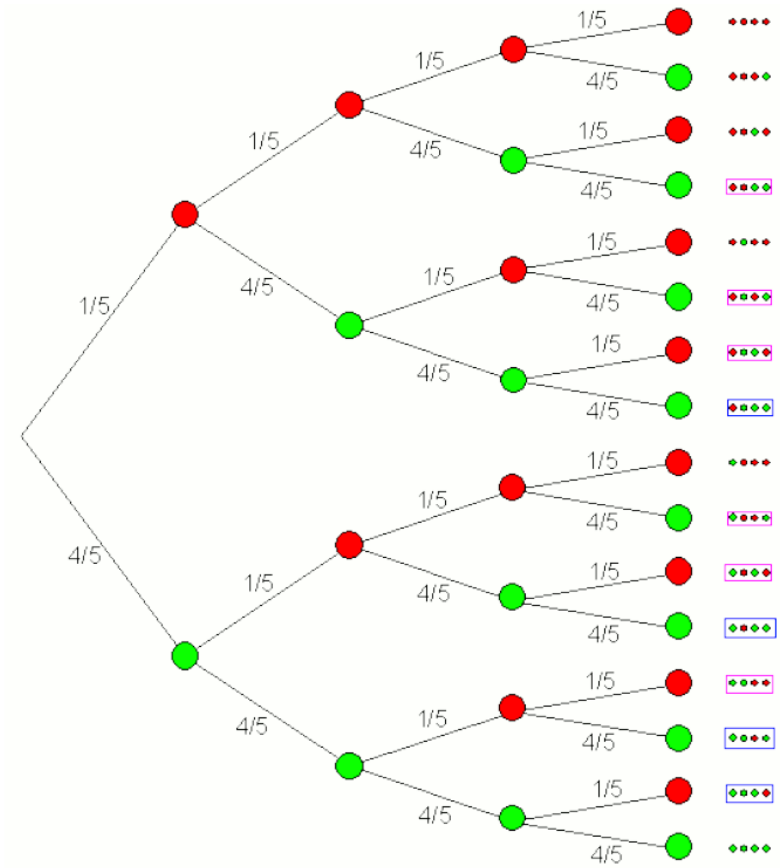
$P(\{r,r,r,r,r,r\})+P(\{g,g,g,g,g,g\})$ Wahrscheinlichkeiten für beide Klassen gleich.

$P(\{r,r,r,r,r,r\})=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35}$ Ziehen ohne zurücklegen

$P=P(\{r,r,r,r,r,r\})+P(\{g,g,g,g,g,g\})=\frac{2\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35}=0{,}02=2\%$

Aufgabe 5

Modell: Urne mit einer roten (Ausschuss) und vier grünen (kein Ausschuss) Kugeln.
Viermal Ziehen mit Zurücklegen.



a) A: Drei von vier sind brauchbar.
   Das Baumdiagramm enthält 4 Pfade, die für das Ereignis A relevant sind.

$$P(A) = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 4 \cdot \frac{64}{625} = 0{,}4096 = 40{,}96\,\%$$

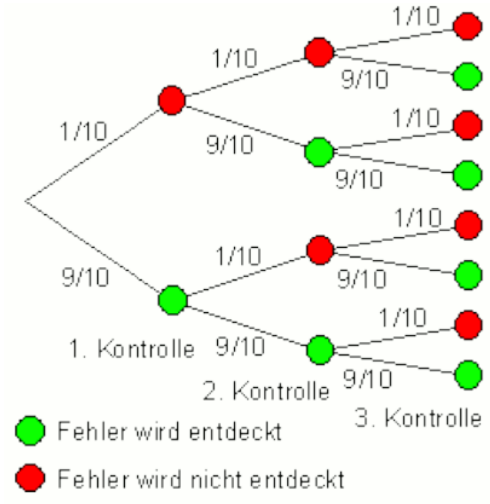
b) B: Zwei von vier sind brauchbar.
   Das Baumdiagramm enthält 6 Pfade, die für das Ereignis B relevant sind.

$$P(B) = 6 \cdot \frac{1}{5}^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 6 \cdot \frac{16}{625} = 0{,}1536 = 15{,}36\,\%$$

c) C: Mindestens drei von vier sind brauchbar.
   Bedeutet drei oder mehr sind brauchbar.

$$P(C) = P(A) + \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 4 \cdot \frac{64}{625} + \frac{256}{625} = 0{,}8192 = 81{,}92\,\%$$

Aufgabe 6



Modell:
Urne mit 1 roten (fehlerhaft) und 9 grünen (fehlerfrei) Kugeln.
Dreimal Ziehen mit Zurücklegen.

Begründung für mit Zurücklegen:
Die Kontrollen geschehen unabhängig voneinander.
Die Ausgangssituation vor jeder Kontrolle ist immer wieder die gleiche.
(Übersehen des Fehlers 10%).

a) A: Spätestens bei der 2. Kontrolle erkannt.
D.h., es wird in der ersten oder in der zweiten Kontrolle erkannt.

In der ersten Kontrolle erkannt: $P(1.) = \frac{9}{10} = 0{,}9$

In der zweiten Kontrolle erkannt: $P(2.) = \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{100} = 0{,}09$

$$P(A) = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \underline{\underline{0{,}99}}$$

b) B: Erst bei der 3. Kontrolle erkannt.

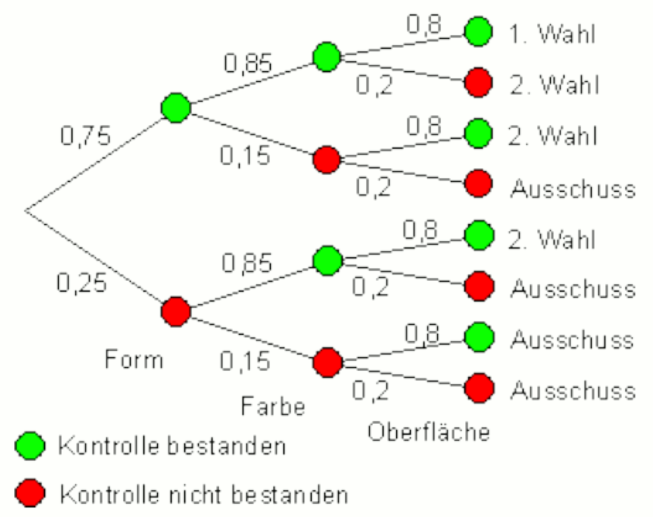
$$P(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{1000} = \underline{\underline{0{,}009}}$$

c) C: Wird nicht erkannt.

$$P(C) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \underline{\underline{0{,}001}}$$ **d)**

Aufgabe 7

a)



1. Wahl:

$0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = \underline{\underline{0,51}}$

2. Wahl:

$0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,2 = 0,1275$

$0,75 \cdot 0,15 \cdot 0,8 = 0,09$

$0,25 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = 0,17$

Ausschuss:

$0,75 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 0,0225$

$0,25 \cdot 0,85 \cdot 0,2 = 0,0425$

$0,25 \cdot 0,15 \cdot 0,8 = 0,03$

$0,25 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 0,0075$

b) $P(1.\text{Wahl}) = \underline{\underline{0,51}}$

c) $P(2.\text{Wahl}) = 0,1275 + 0,09 + 0,17 = \underline{\underline{0,3875}}$

d) $P(\text{Ausschuss}) = 0,0225 + 0,0425 + 0,03 + 0,0075 = \underline{\underline{0,1025}}$

Aufgabe 8

a) $P(A) = \frac{4500}{10000} \qquad P(B) = \frac{9500}{15000}$

$$P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4500}{10000} \cdot \frac{9500}{15000} = \underline{\underline{0{,}285}}$$

b) Es liegt kein Gewinn vor, wenn man in Lotterie A und in Lotterie B nichts gewinnt.

Dabei gilt: $\bar{A}$ Niete in Lotterie A $\qquad$ $\bar{B}$ Niete in Lotterie B

$$P(E_2) = P\left(\bar{A} \cap \bar{B}\right) = \frac{5500}{10000} \cdot \frac{5500}{15000} = \underline{\underline{0{,}202}}$$

c) E_3 ist das Gegenereignis von E_2

$$P(E_3) = 1 - P(E_2) = 1 - 0{,}202 = \underline{\underline{0{,}798}}$$