Darstellung und Berechnung von Zylindern und Kegeln

(Einführung)

von

Helmut Hinder

Gießen, 2020

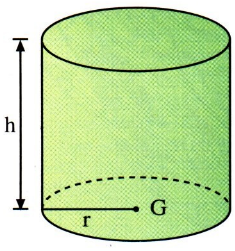
Grafiken in Teilen entnommen aus:

LS 8, Westermann 9 (Erweiterungskurs), Mathematik heute 10 mit freundlicher Genehmigung der Autoren.

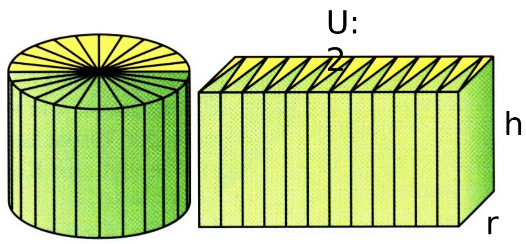
Der Zylinder

Das Volumen des Zylinders

Die Fläche eines Kreises mit dem Radius r ist flächeninhaltsgleich zu einem Rechteck mit den Seitenlängen $\frac{U}{2}$ (dem halben Umfang des Kreises) und r.



Entsprechend kann man einen Zylinder zerlegen und die Teile zu einem Körper zusammensetzen, der bei immer feinerer Einteilung zu einem Quader wird.

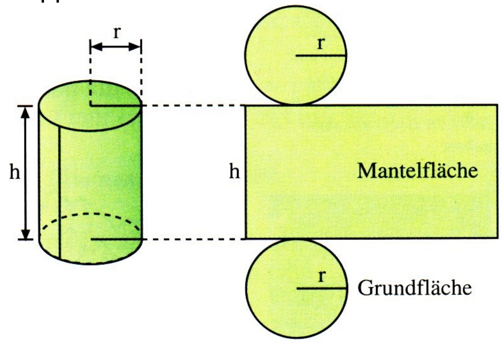


Die Grundfläche dieses Quaders ist flächengleich zur Grundfläche des Zylinders. Also gilt für das Volumen (Rauminhalt) des Zylinders:

$$\begin{aligned} V &= G \cdot h \\ &= \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned}$$

Die Oberfläche des Zylinders

Den Oberflächeninhalt des Zylinders erhält man, indem man zum doppelten Flächeninhalt der Grundfläche den Flächeninhalt des Mantels addiert:



$\boxed{O = 2 \cdot G + M}$

Der Mantel hat die Seitenlängen 2·pi·r und h, also

$\boxed{M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}$

Beispiel:

Eine Konservendose hat einen Durchmesser von 7,0 cm und eine Höhe von 8,0 cm.

Berechne

a) das Volumen der Dose,

b) den Flächeninhalt des Bleches der Dose.

Lösung:

a)

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \qquad r = \frac{d}{2}$

$V = \pi \cdot (3{,}5\ \text{cm})^2 \cdot 8\ \text{cm}$

$V = \pi \cdot 98\ \text{cm}^3$

$V \approx 307{,}9\ \text{cm}^3$

b)

$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r + h)$

$O = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}5\ \text{cm} \cdot (3{,}5\ \text{cm} + 8\ \text{cm})$

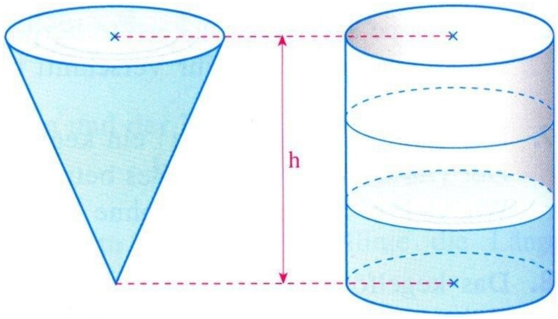
$O = \pi \cdot 80{,}5\ \text{cm}^2$

$O \approx 252{,}9\ \text{cm}^2$

Der Kegel

Das Volumen des Kegels

Die Grundfläche und die Höhe des Kegels und des Zylinders sind jeweils gleich groß.



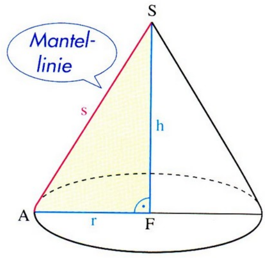
Nun wird der Kegel mit Wasser gefüllt. Danach wird das Wasser in den Zylinder gegossen. Um den Zylinder vollständig zu füllen, muss dieser Vorgang zweimal wiederholt werden.

Volumen des Kegels:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

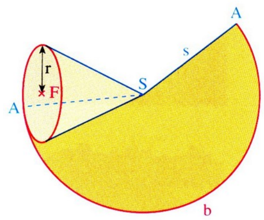
Die Oberfläche des Kegels



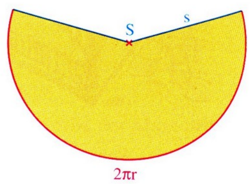
Die Oberfläche des Kegels besteht aus Boden- und Mantelfläche.

Wir betrachten zunächst nur die **Mantelfläche** des Kegels.

Dazu stellen wir uns vor, den Mantel eines Kegels auf zuschneiden und in der Ebene abzuwickeln.



Wir erhalten dann einen Kreisausschnitt mit dem Radius s und dem Kreisbogen b.



Wir erinnern uns. Die Fläche eines Kreises berechnet man aus:

$$\mathbf{F_{Kreis} = \pi \cdot s^2}$$

Durch geschicktes Umformen (darauf kommt man nicht so ohne weiteres) erhalten wir:

$$\mathbf{F_{Kreis} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (2 \cdot \pi \cdot s)}$$ (In Worten: F = Halber Radius mal Länge des Bogens.)

Wir haben aber keinen ganzen Kreis, sondern nur einen Kreisausschnitt,

(unsere aufgeschnittene und abgewickelte Mantelfläche)!!!

Deshalb müssen wir die ermittelte Bogenlänge

$$\mathbf{(2 \cdot \pi \cdot s)}$$

durch die tatsächliche Bogenlänge unsers Kreisausschnittes ersetzen.

Die Länge des Bogens unseres Kreisausschnittes beträgt aber:

$$\mathbf{(2 \cdot \pi \cdot r)}$$ (Umfang der Grundfläche des Kegels)

Wir erhalten nun folgende Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der Mantelfläche:

$$\mathbf{M = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (2 \cdot \pi \cdot r)}$$

$$\mathbf{M = \pi \cdot r \cdot s}$$

Um die Oberfläche des Kegels zu erhalten, müssen wir nun noch den Flächeninhalt der kreisförmigen Bodenfläche zum Flächeninhalt der Mantelfläche addieren.

Die Formel für die Bodenfläche des Kegels lautet:

$$F_B = \pi \cdot r^2$$

Nun können wir die Oberfläche des Kegels berechnen:

$$O = F_B + M$$

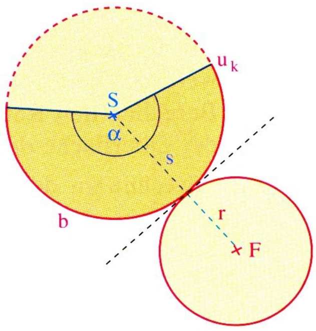
$$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

$$O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$$

Der Mittelpunktswinkel des Kegels

Der Mittelpunktswinkel α lässt sich sehr schön über einen einfachen Dreisatz berechnen:
So gilt:

Länge des Kreisbogens	Mittelpunktswinkel α
$2 \cdot \pi \cdot s$ (Umfang des Kreises)	$360°$
1	$\frac{360°}{2 \cdot \pi \cdot s}$
$2 \cdot \pi \cdot r$ (Länge des Kreisbogens der Mantelfläche)	$\frac{360°}{2 \cdot \pi \cdot s} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r =$ $\frac{360° \cdot r}{s}$



Damit haben wir alle Formeln für den Kegel zusammen:

Für einen Kegel mit dem Radius r, der Länge s einer Mantellinie und der Höhe h gilt:

(1) Volumen:	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
(2) Mantelfläche:	$M = \pi \cdot r \cdot s$
(3) Oberfläche:	$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r \cdot (r + s)$
(4) Mittelpunktswinkel des Mantels:	$\alpha = \frac{360° \cdot r}{s}$

Aufgaben

(Achtung: Es wird mit π auf der Taschenrechnertaste gerechnet. Endergebnisse sind geeignet zu runden.)

Aufgabe 1

Berechne das Volumen der Zylinder! Achte auf die Maßeinheiten!

	a)	b)	c)
r	2 cm	5 m	
h	3 cm		0,7 m
V		471,24 m^3	0,352 m^3

Aufgabe 2

Berechne das Volumen einer zylinderförmigen Dose mit 11 cm Durchmesser und 16 cm Höhe.

Aufgabe 3

Berechne die fehlenden Größen eines Zylinders!

	a)	b)	c)
r		14 cm	8 dm
h	4 cm		22 dm
V	804,3 cm³	7389 cm³	

Aufgabe 4

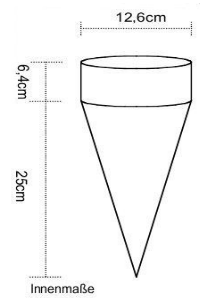
Wie viel Liter passen in einen kegelförmigen Behälter von 26 cm Höhe und einem Durchmesser von 24 cm ?
Achtung: Alle Maße sind Innenmaße! Runde das Endergebnis auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe 5

Wie viel Liter Wasser passen in ein Rohr von 6 m Länge und einem Innendurchmesser von 16 cm ?

Aufgabe 6

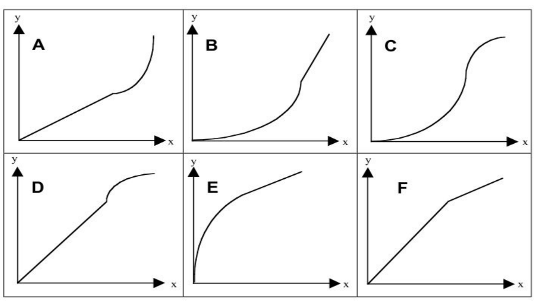
Das abgebildete Gefäß wird mit Flüssigkeit gefüllt.



a) Wie viel Liter fasst das Gefäß?
Alle Maße sind Innenmaße.
Runde das Endergebnis auf eine Stelle nach dem Komma.

b) Welcher der abgebildeten Füllgraphen (Funktionsgraph, der die Wasserstandshöhe in Abhängigkeit von der Einfüllzeit darstellt.) beschreibt den Füllvorgang richtig, wenn vorausgesetzt wird, dass die Flüssigkeit gleichmäßig eingefüllt wird?
Begründe deine Antwort.

Füllgraphen: (x-Achse: Zeit; y-Achse: Füllhöhe)



Aufgabe 7

Ein zylinderförmiger Tank mit 1 m Radius und 4 m Höhe ist zu 30 % mit Wasser gefüllt. Wie viel l passen noch hinein ?

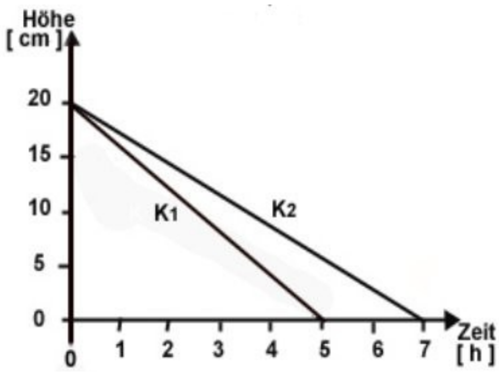
Aufgabe 8

565,2 l Saft sollen in zylinderförmige Dosen mit 10 cm Durchmesser und 9 cm Höhe gefüllt werden.
Wie viel Dosen braucht man dazu ?

Aufgabe 9

Zwei unterschiedliche Kerzen K1 und K2 aus dem gleichen Material werden abgebrannt.
Stündlich wird ihre Höhe gemessen und in ein Diagramm eingetragen.

a) Was kannst du aus dem Diagramm über die Brenndauer jeder einzelnen Kerze ablesen
b) Welche Aussagen kannst du über die Form der beiden Kerzen machen?



Aufgabe 10

Ein runder Stahlstab hat eine Querschnittsfläche von 314,16 mm² und ein Volumen von 1.727,88 cm³. Berechne seine Länge.
Achtung: Achte auf die Maßeinheiten!

Aufgabe 11

Aus einem Holzwürfel mit der Kantenlänge a = 12 cm soll ein möglichst großer Kegel gedrechselt werden. Berechne Volumen und Masse des Kegels.
(ρ = 0,8 g/cm³)

Aufgabe 12

Ein zylindrisches Abflussrohr hat eine Länge von 8,5 m und fasst 96,13 l Wasser. Berechne seinen Innendurchmesser.

Aufgabe 13

Ein zylinderförmiger Tank hat eine Höhe von 3 m und fasst 9.424,78 l Wasser. Berechne den Radius und die Oberfläche des Tanks.

Aufgabe 14

Von einem Kegel sind die folgenden Angaben bekannt. Berechne alle Unbekannten.
Achtung: Gib alle Längenmaße in cm, alle Flächenmaße in cm² an.

	a)	b)	c)
r	4 cm	6 cm	
h	3 cm		4 cm
s		12 cm	17 cm
M			880,8 cm²
O	113,04 cm²		
V		1055,04 cm³	

Aufgabe 15

Eine 16 cm hohe, zylinderförmige Kerze hat eine Brenndauer von 10 Stunden. Sie brennt gleichmäßig ab. Gib den Buchstaben der Funktionsgleichung an, die den Abbrennvorgang beschreibt. Begründe deine Entscheidung.
(x: Brennzeit in Stunden; y: Kerzenhöhe in cm)

A	$y = 16 - 10x$	B	$y = 16 - 1{,}6x$	C	$y = 10 - 16x$
D	$y = 16 - 16x$	E	$y = 16 + 1{,}6x$		

Aufgabe 16

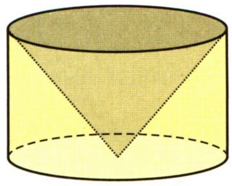
Ein kegelförmiger Trichter mit d = 30 cm soll 3 l fassen. Wie hoch muss er sein?
Achtung: Alle Maße sind Innenmaße.

Aufgabe 17

Wie viel wiegt ein ein Meter langer Stahlstab, der einen Durchmesser von 12 mm hat. Stahl hat ein (man sagt eigentlich: spezifisches Gewicht) Gewicht von 7,85 g/cm³.

Aufgabe 18

Aus dem rechts abgebildeten Holzzylinder wird von oben ein Kegel ausgebohrt.
Der Zylinder ist 12 cm hoch und 20 cm breit (Durchmesser).



a) Wie viel cm³ Abfall entstehen durch das Ausbohren?

b) Wie schwer ist der Restkörper (Holz hat eine Dichte von etwa 0,7 g/cm³).

Aufgabe 19

Ein kegelförmig aufgeschütteter Getreidehaufen hat einen Umfang von 15,7 m und eine Höhe von 2,1 m. Wie viel Getreide enthält der Getreidehaufen?

Aufgabe 20

Ein zylinderförmiger Güllebehälter mit einem Durchmesser von 12,8 m und einer Höhe von 3,55 m ist bis zum Rand gefüllt. Der Landwirt will die gesamte Gülle abfahren. Wie viele Fuhren sind notwendig, wenn sein Güllewagen 8 m³ fasst?

Selbstdiagnosebogen

Beachte:

1. Der Selbstdiagnosebogen wird dir helfen, zu erkennen, wie dein Lernstand ist.
2. Suche dir ein Teilthema (Spaltennr. 1) aus.
3. Bearbeite die in Spaltenr. 7 angegebenen Aufgaben und kontrolliere sie selbstständig.
4. Wenn du der Meinung bist, dass du das entsprechende Teilthema (Spaltennr. 1) hinreichend gut verstanden hast, bearbeite zum Test die zugehörigen Sdb-Aufgaben und kontrolliere sie.
5. Fülle daran anschließend die Spaltennr. 3 - 6 des Rasters aus.
6. Überlege dir, ob du weitere Übungen zu deinem Teilthema bearbeiten willst. Gerne berate ich dich hierbei
7. Wähle dir nun ein anderes Teilthema (Spaltennr. 1). Nun wiederholen sich die Punkte 3. - 6.
8. Wenn du alle Teilthemen bearbeitet und verstanden hast, bist du am Ziel.

Selbstdiagnosebogen Klassen 10R **Name: ....** **Darstellung und Berechnung von Zylindern und Kegeln (Einführung)**

Ich kann ...	**Teste dich mit den Sdb-Aufgaben** (siehe nachfolgende Seiten)	**Das kann ich anderen erklären, hier fühle ich mich sicher** √√√	**Hier fühle ich mich fast sicher, mache nur selten Fehler** √√	**Hier muss ich noch üben** √	**Ich brauche noch Hilfe von anderen** !	**Übungsaufgaben** (Aufgaben-Nr.)
… das Volumen (Masse) eines Zylinders berechnen.	**Sdb - Aufgabe 1; 5**					1; 3; 4; 5; 6; 9; 15; 16
... die Höhe, den Radius (Durchmesser) eines Zylinders berechnen.	**Sdb - Aufgaben 1**					8
... Mantel- und Oberfläche eines Zylinders berechnen.	**Sdb – Aufgaben 4; 5; 6**					11
... das Volumen (Masse) eines Kegels berechnen.	**Sdb - Aufgabe 7**					1; 4; 12; 16; 17; 19
... die Höhe, Radius (Durchmesser) und die Mantellinie eines Kegels berechnen.	**Sdb - Aufgabe 2**					10: 11; 12; 14
... Mantel- und Oberfläche des Kegels berechnen.	**Sdb - Aufgabe 6; 7**					12; 14
… Sachaufgaben zum Zylinder und Kegel berechnen.	**Sdb - Aufgabe 3; 4; 5; 6;7**					1; 2; 3; 5; 6; 7; 11; 13; 14; 15; 16; 17; 20

Darstellung und Berechnung von Zylindern und Kegeln (Einführung)

Sdb-Aufgabe 1

Berechne das Volumen der Zylinder!
Achte auf die Maßeinheiten!

	a)	b)
r	48 mm	1,7 m
h	12 cm	
V		8171,282 dm^3

Sdb-Aufgabe 2

Berechne die fehlenden Größen eines Kegels!

	a)	b)
r		25 cm
h	2 cm	
V	100,53 cm^3	39269 cm^3

Sdb-Aufgabe 3

Im Garten soll eine kreisrunde Tischplatte aus Sandstein aufgelegt werden. Die Platte hat einen Durchmesser von 1,6 m und ist 3 cm dick. Wie schwer ist die Platte? Rechne um in kg! (1 cm^3 Sandstein wiegt 2,6 g)

Sdb-Aufgabe 4

Ein zylindrischer Tank, der mit einer der Kreisflächen auf der Erde steht, soll mit Rostschutzfarbe gestrichen werden. Der Tank hat einen Durchmesser von 3,8 m und ist 4,5 m hoch.
Eine Dose Rostschutzfarbe reicht für 6 m^2.
Wie viele Dosen Farbe werden benötigt, wenn der Tank zur Sicherheit zweimal gestrichen wird ?

Sdb-Aufgabe 5

Eine Litfasssäule ist 2,5 m hoch und hat einen Durchmesser von 120 cm.

a) Wie groß ist die Werbefläche die man bekleben kann?

b) Berechne das Volumen der Säule.

Sdb-Aufgabe 6

Das kegelförmige Dach eines Turmes soll erneuert werden. Der Durchmesser des Daches beträgt 3,50 m und die Mantellinie beträgt 6,50 m.
Berechne, wie groß die zu deckende Dachfläche ist.

Sdb-Aufgabe 7

Berechne das Gesamtvolumen und die Gesamtoberfläche der abgebildeten Figur (zwei zusammengesetzte Kegel).